

The Assignment for Chapter 6
of Statistical Mechanics and Neural Networks

Yuhao Li

PMI Lab, School of Physics, Sun Yat-sen University

November 4, 2024



考虑 $E \sim N(0, N^2/2)$, $S \sim N(0, N^{2\alpha}/2)$, 讨论不同指数对处于不同自由能水平的构型数的影响

注意到 $F = E - TS$, 自由能的概率分布写为

$$P(F) = \mathbb{E}_{E,S} \delta(F - (E - TS)) = \int \frac{d\hat{F}}{2\pi} e^{i\hat{F}F} \mathbb{E}_E e^{-i\hat{F}E} \mathbb{E}_S e^{i\hat{F}TS} \quad (1)$$

其中, 能量项计算为

$$\mathbb{E}_E e^{-i\hat{F}E} = \int dE P(E) e^{-i\hat{F}E} = \int dE \frac{1}{\sqrt{N\pi}} \exp\left(-\frac{E^2}{N} - i\hat{F}E\right) = e^{-N\hat{F}^2/4} \quad (2)$$

熵项计算为

$$\mathbb{E}_S e^{i\hat{F}TS} = \int dS P(S) e^{i\hat{F}TS} = \int dS \frac{1}{N^\alpha \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{S^2}{N^{2\alpha}} + i\hat{F}TS\right) = e^{-N^{2\alpha} T^2 \hat{F}^2/4} \quad (3)$$

因此

$$P(F) = \int \frac{d\hat{F}}{2\pi} \exp(-N\hat{F}^2/4 - N^{2\alpha} T^2 \hat{F}^2/4 + i\hat{F}F) \quad (4a)$$

$$= \int \frac{d\hat{F}}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{4}(N + N^{2\alpha} T^2)\hat{F}^2 + i\hat{F}F\right] \quad (4b)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(N + N^{2\alpha} T^2)}} \exp\left(-\frac{F^2}{N + N^{2\alpha} T^2}\right) \quad (4c)$$

考虑含有 N 个 Ising 自旋的系统，总构型数为 2^N ，给定自由能 F ，构型数为

$$\langle n(F) \rangle = 2^N P(F) = \frac{1}{\sqrt{\pi N(1 + N^{2\alpha-1} T^2)}} \exp\left(N \ln 2 - \frac{F^2}{N(1 + N^{2\alpha-1} T^2)}\right) \quad (5)$$

类比热力学熵的概念，可以定义自由能密度的构型熵，在 1RSB 中又称为复杂性，为

$$\Sigma(f) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle n(F) \rangle}{N} \quad (6a)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\ln 2 - \frac{f^2}{(1 + N^{2\alpha-1} T^2)} - \frac{1}{2N} \ln(\pi N(1 + N^{2\alpha-1} T^2)) \right] \quad (6b)$$

$$= \ln 2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f^2}{(1 + N^{2\alpha-1} T^2)} \quad (6c)$$

因此可得构型熵与 α 的关系为

$$\Sigma(f) = \begin{cases} \ln 2 - f^2 & \text{for } \alpha < \frac{1}{2} \\ \ln 2 - \frac{f^2}{1 + T^2} & \text{for } \alpha = \frac{1}{2} \\ \ln 2 & \text{for } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (7)$$

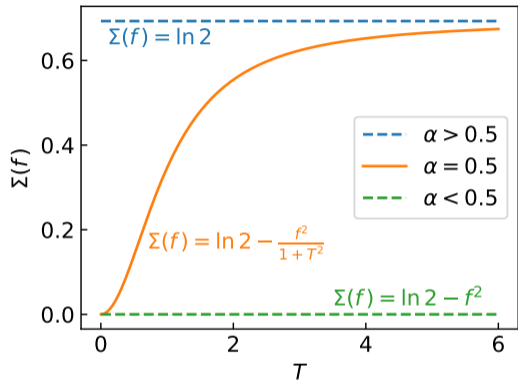


FIG. 1. 不同 α 下自由能密度的构型熵随温度的变化。自由能密度取 $f = \sqrt{\ln 2}$ ，因此， $\alpha > 0.5$ 时 $\Sigma = \ln 2$ ， $\alpha < 0.5$ 时 $\Sigma = 0$ ， $\alpha = 0.5$ 时 Σ 随温度变化。

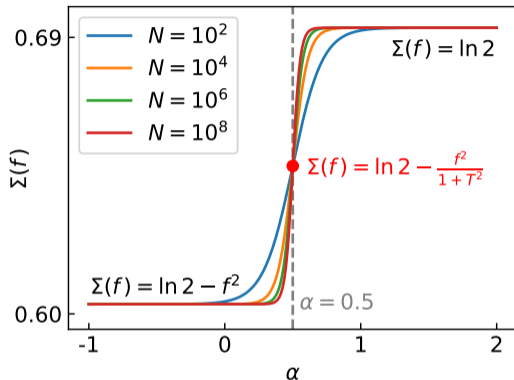


FIG. 2. 大 N 极限下自由能密度的构型熵随 α 的变化。自由能密度取 $f = 0.3$ ，温度取 $T = 1$ ，在 $N \rightarrow \infty$ 极限下，构型熵 Σ 在 $\alpha = 0.5$ 处发生跳变。